Beiträge
zur Theorie der elektrischen Schwingungen
eines leitenden Rotationsellipsoides.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der Königl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 13. Juni 1906

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Franz Fuchs
aus Strassburg im Elsass.

München 1906.
Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552318_0047

Zur Dissertation: Franz Fuchs, München 1906.

Durch Herrn Abraham wurde ich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß neben den geraden Funktionen $\xi_{11} = \xi_{21}$ (vgl. pag. 17 und 18) auch ungerade Funktionen auftreten können, für welche dann $\delta = -1$ zu setzen ist, der Wert von δ kann sich nämlich gleich $\frac{0}{0}$ ergeben und diese Möglichkeit wurde von mir übersehen. Es folgt hieraus, daß dann $a = +1$, weshalb die Darstellungen (22) und (23) auch für die ungeraden Funktionen ihre Form behalten, nur ist in (23) an Stelle von $G(-x)$ jetzt $-G(-x)$ zu setzen. Bei den weiteren Untersuchungen ist es ohne wesentliche Bedeutung, ob man mit den geraden oder ungeraden Funktionen rechnet; man hat für letztere nur $\xi_{11} = -\xi_{21}$ zu setzen.

Inzwischen hat Herr Abraham weitere Einwände gegen meine Arbeit erhoben,[1]) zu denen ich hier gleich folgendes bemerken möchte.

1. Was zunächst die Grenzbedingungen betrifft, von welchen Herr Abraham behauptet, daß sie voneinander abhängig seien, so ist doch nicht jede Gleichung eine Folge der übrigen. Die Gleichung für X ist zwar eine Folge der Gleichung für N, aber nicht umgekehrt. Dieser umgekehrte Fall liegt jedoch bei mir vor. Es sind also in diesem speziellen Falle die drei Gleichungen voneinander unabhängig und man darf bei einer vollständigen Behandlung des Problems keine der drei Grenzbedingungen fortlassen. Es ist dies auch daraus ersichtlich,

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1907, Bd. 16, pag. 85.

daß die drei Grenzbedingungen gerade ausreichen, um aus dem gegebenen Anfangszustande und den Konstanten die Schwingungszahlen für das Innere und Äußere sowie die Amplituden und Dämpfungsdekremente für das Äußere zu bestimmen.

2. In der letzten Grenzbedingung (55) ist das Glied $4\pi\lambda X_L$ durch ein Versehen beim Druck weggeblieben, wie man aus dem nachfolgenden Texte ersieht, da doch ausdrücklich $(X_L)_{x=x_0} = \left(\frac{\partial \Pi_L}{\partial y}\right)_{x=x_0} = 0$ gesetzt wurde.

3. Daß die tangentielle Komponente der elektrischen und magnetischen Kraft an der Leiteroberfläche gleich Null ist, sagt in der Tat aus, daß kein Energieaustausch stattfindet. Bei dem von mir behandelten Probleme ist dies aber auch nicht zu verlangen (vgl. Nr. 6). Die Oberfläche meines Leiters ist als eine Knotenfläche für die elektrischen und magnetischen Kräfte anzusehen.

4. Herr Abraham scheint ferner übersehen zu haben, daß die Gleichung (62) in der Tat nur die Zahlen n_1 für das Innere (d. h. den Leiter) liefert. Aus den Zahlen n_1 erhält man durch die Gleichung: $T = \frac{2\pi i}{J\left(\frac{1}{n}\sqrt{\sigma^2 + 4\,a_1^2 n_1^2}\right)}$, wobei J imaginärer Teil bedeutet, die Perioden für die Eigenschwingungen im Leiter; diese hängen also ab von den geometrischen und physikalischen Konstanten des Ellipsoids. Für den Isolator erhält man schließlich die Zahlen n (pag. 34) aus der Gleichung (58) und es gehen dann selbstverständlich auch die Konstanten des Isolators ein.

Die Schwingungszahlen des Isolators hängen also von den Konstanten des Isolators und des Leiters ab, diejenigen des Leiters allerdings nur von seinen eigenen Konstanten.

5. Was Herrn Abrahams Einwurf gegen das gleichzeitige Auftreten von forteilenden und rückeilenden Wellen betrifft, so ist dieses Auftreten eben eine mathematische Folge der Grenzbedingungen; die physikalische Möglichkeit kommt dabei gar nicht in Betracht. Sind diese Resultate physikalisch wirk-

lich unmöglich, so müßten andere Grenzbedingungen eingeführt, d. h. es müßte ein anderes mathematisches Problem behandelt werden; oder man müßte annehmen, daß derartige Schwingungsprobleme unendlich viele Lösungen haben, d. h. durch die Grenzbedingungen noch nicht bestimmt sind. Eine Lösung habe ich jedenfalls aufgestellt.

6. Herr Abraham scheint bei Erhebung seiner Einwände übersehen zu haben, daß mein Problem von dem seinigen verschieden ist; ich behandle Austausch von Schwingungen zwischen Leiter und Isolator, während Herr Abraham nur die Schwingungen im Isolator betrachtet.

Bei mir ist nur vorausgesetzt, daß irgendwie das Gleichgewicht gestört wird, und daß nun Schwingungen stattfinden; bei Herrn Abraham ist dagegen die Quelle der Schwingungen im Innern des Leiters zu suchen, denn nur dadurch kann es bedingt sein, daß bei ihm nur forteilende Wellen auftreten. Setzt man die von Herrn Abraham für das Äußere gefundene Lösung entsprechend den Grenzbedingungen in's Innere (also vom Isolator in den Leiter) fort, so findet man in der Tat für das Innere eine längs der Achse ($x = 1$) unendlich werdende Lösung. Von einer Quelle im Unendlichen kann man bei meiner Lösung nicht sprechen, da es sich um einen stationären Zustand handelt, bei dem an der Oberfläche des Ellipsoids kein Energiefluß stattfindet.

7. Mit der drahtlosen Telegraphie, die Herr Abraham in seine Betrachtungen hineinzieht, hat mein Problem nichts zu tun und ich habe mich auf dieselbe nirgends bezogen.

Meinen Eltern.

Einleitung.

Herr Professor Lindemann behandelt in seiner Arbeit:[1]) Zur Theorie der Spektrallinien II, die elastischen Schwingungen eines im Lichtäther ruhenden Ellipsoids. Die im Ellipsoid erregten Schwingungen pflanzen sich in den Äther fort gemäß den Grenzbedingungen der Elastizitätstheorie, welche alle erfüllt werden.

Schon früher hatte Herr Abraham die elektrischen Schwingungen eines leitenden verlängerten Rotationsellipsoides unter Zugrundelegung der Maxwellschen Gleichungen betrachtet.[2]) Die Grenzbedingungen werden für den unendlich guten Leiter spezialisiert, wonach die elektrischen Kraftlinien auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen. Als weitere Bedingung wird auch verlangt, daß im Unendlichen nur vom Erreger fortleitende Wellen auftreten sollen. Diese Bedingung setzt einen Zusammenhang zwischen den Integralen im Endlichen und im Unendlichen voraus, welcher von Herrn Abraham auf rechnerischem Wege für zwei Integrale erhalten wird. Von diesen beiden Integralen wird nämlich das eine im Unendlichen asymptotisch durch e^{+nx}, das andere durch const e^{+nx} + const$'$ e^{-nx} dargestellt.

Obgleich beide Integrale im Unendlichen ihre Gültigkeit behalten, wird nur das eine, e^{+nx} entsprechende Integral im Äußern verwandt, welches dann mit dem die Zeit (t) enthaltenden Faktor e^{-ant} multipliziert, nur forteilenden Wellen entspricht. Es fragt sich dabei, ob diese spezielle Wahl der

[1]) Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissensch. 1903, Bd. 33.

[2]) Annalen der Physik 1898, Bd. 66.

Integrale ohne besondere Bedingung für die Konstanten des Problems erlaubt und ob bei unserer allgemeinen Aufgabe die Bedingung für die Ausstrahlung mit den Grenzbedingungen verträglich ist.

Durch Herrn Professor Lindemann wurde ich auf die Lücken in der Abrahamschen Arbeit aufmerksam gemacht und veranlaßt, diese Untersuchungen nochmals durchzuführen unter Anwendung des funktionentheoretischen Verfahrens, welches in der „Theorie der Spektrallinien II“ gegeben wurde.

Um den Zusammenhang zwischen den Integralen im Endlichen (Stellen der Bestimmtheit) und dem Unendlichen (Unbestimmtheitsstelle) feststellen zu können, suchen wir zunächst nach den Methoden von Herrn Poincaré zwei konvergente Normalintegrale unserer Differentialgleichung auf. Diese Normalintegrale, welche selbst nur in der Umgebung des unendlich fernen Punktes gültig sind, haben die merkwürdige Eigenschaft, daß ihre Differenz ein überall im Endlichen gültiges Integral unserer Differentialgleichung bildet. Hiedurch ist der erwähnte Zusammenhang wenigstens für ein Integral gegeben.

Setzt man dann die asymptotischen Werte der Integrale in die Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Kräfte ein, so treten zunächst die Ausdrücke $e^{n(x+at)}$ und $e^{n(x-at)}$ auf. Sollen jedoch nur forteilende Wellen im Unendlichen auftreten, so muß der Faktor von $e^{n(x+at)}$ verschwinden. Diese Bedingung für die Ausstrahlung im Unendlichen ist jedoch, wie gezeigt werden soll, mit den Grenzbedingungen des Problems nicht verträglich.

Von Herrn Professor Lindemann wurde ich während der Anfertigung in reichstem Maße unterstützt. Auch an dieser Stelle spreche ich ihm hiefür meinen innigsten Dank aus.

§ 1.

Ableitung der Differentialgleichungen.

Bezeichnet man mit X', Y', Z' bzw. L', M', N' die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Kraft in Richtung der positiven Achsen eines rechtsdrehenden Koordinatensystems (x, y, z), so lauten die Maxwell-Hertzschen Grundgleichungen der Elektrodynamik:[1])

$$\begin{aligned}
\varepsilon \cdot A \frac{\partial X'}{\partial t} + 4\pi\lambda A X' &= \frac{\partial N'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial z} \\
\varepsilon \cdot A \cdot \frac{\partial Y'}{\partial t} + 4\pi\lambda \cdot A Y' &= \frac{\partial L'}{\partial z} - \frac{\partial N'}{\partial x} \\
\varepsilon \cdot A \cdot \frac{\partial Z'}{\partial t} + 4\pi\lambda \cdot A Z' &= \frac{\partial M'}{\partial x} - \frac{\partial L'}{\partial y} \\
-\mu A \frac{\partial L'}{\partial t} &= \frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} \\
-\mu A \frac{\partial M'}{\partial t} &= \frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x} \\
-\mu A \frac{\partial N'}{\partial t} &= \frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Hierin bedeutet ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität und λ die elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit; A ist die reziproke Lichtgeschwindigkeit für den freien Äther.

Um die Grenzbedingungen für unser Ellipsoid in einfacher Weise aufstellen zu können, ist es bequem, die Gleichungen (1) auf ein krummliniges, dreifach orthogonales Koordinatensystem zu transformieren. Seien u, v, w die Parameter dreier orthogonaler Flächenscharen; $u = \text{const}$ soll dann die Oberfläche unseres leitenden Ellipsoids sein. Die Richtungen der wach-

[1]) Bezeichnung nach H. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft.

senden u, v, w sollen wieder ein rechtsdrehendes Koordinatensystem bilden; ferner seien X, Y, Z bzw. L, M, N die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Kraft in Richtung der wachsenden u, v, w. Unter Berücksichtigung der Gleichungen, welche zwischen den Richtungskosinus der drei Flächennormalen in Bezug auf die Achsen der x, y und z bestehen, läßt sich in bekannter Weise das Gleichungssystem (1) auf die krummlinigen Koordinaten u, v, w umrechnen. Setzt man hiebei:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = U$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = V$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = W,$$

so daß sich das Linienelement ds in der Form:

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

darstellt, so heißen die transformierten Gleichungen:[1])

$$\begin{aligned}
\varepsilon A \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot X &= V \cdot W \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{M}{V}\right)\right] \\
\varepsilon A \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot Y &= W \cdot U \left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{W}\right)\right] \\
\varepsilon A \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot Z &= U \cdot V \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{U}\right)\right] \\
-\mu A \frac{\partial L}{\partial t} &= V \cdot W \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Z}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{Y}{V}\right)\right] \\
-\mu A \frac{\partial M}{\partial t} &= W \cdot U \left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{X}{U}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Z}{W}\right)\right] \\
-\mu A \frac{\partial N}{\partial t} &= U \cdot V \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Y}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{U}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2}$$

[1]) Abraham führt diese Transformationen mit Vektoren aus. Vgl. Dissertation, Berlin 1897.

Wir spezialisieren nun unsere Aufgabe auf den Fall des axialsymmetrischen Feldes; es sollen also sowohl die geometrischen Größen U, V, W sowie die elektrischen und magnetischen Kräfte unabhängig von w sein (w ist dann der Winkel zwischen den Meridianebenen). Die elektrische (bzw. magnetische) Kraft kann dann nur in die Meridianebene fallen oder sie muß in Kreisen die Z-Achse (Symmetrieachse) umziehen. Diesen beiden Fällen entsprechen die zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
\varepsilon A \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot X &= \quad V \cdot W \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{N}{W}\right) \\
\varepsilon A \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot Y &= -W \cdot U \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{W}\right) \qquad (3) \\
-\mu A \frac{\partial N}{\partial t} &= \quad U \cdot V\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Y}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{U}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon A \frac{\partial Z}{\partial t} + u\pi\lambda A Z &= \quad U \cdot V\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{U}\right)\right] \\
-\mu A \frac{\partial L}{\partial t} &= +V \cdot W \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Z}{W}\right) \qquad (4) \\
-\mu A \frac{\partial M}{\partial t} &= -W \cdot U \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Z}{W}\right).
\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungssysteme sind voneinander unabhängig. Wir wollen hier das erste (3) weiter behandeln; aus $Z = 0$ folgt nach (4) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$ oder, da hinsichtlich t der Zustand periodisch ist: $L = 0$ und $M = 0$. Die erste Gleichung (4) wird dann identisch erfüllt. Das System (3) enthält also alle Gleichungen, welche wir brauchen.

Wir lösen die Gleichungen (3) durch den Ansatz:[1])

$$\frac{N}{W} = \varepsilon A \frac{\partial \Pi}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot \Pi, \qquad (5)$$

wo Π eine Funktion von t, u und v ist.

[1]) Vgl. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 1899.

Durch Einsetzen von (5) in die beiden ersten Gleichungen (3) und Integration nach t erhält man:

$$\begin{aligned} X &= + V \cdot W \frac{\partial \Pi}{\partial v} + C_1 \cdot e^{-4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot t} \\ Y &= - U \cdot W \frac{\partial \Pi}{\partial u} + C_2 \cdot e^{-4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Konstanten (in Bezug auf t) C_1 und C_2 setzen wir gleich Null, was darauf hinaus kommt, daß wir nirgends wahre Elektrizität im Volumenelement annehmen.

Die Funktion Π ist durch die Differentialgleichung bestimmt, welche man durch Einsetzen der Ausdrücke (6) in die letzte Gleichung (3) erhält:

$$\begin{aligned} &A^2 \cdot \varepsilon\,\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \cdot \varepsilon\,\mu\, A^2 \frac{\partial \Pi}{\partial t} \\ &= \frac{U \cdot V}{W}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U \cdot W}{V}\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V \cdot W}{U}\frac{\partial \Pi}{\partial v}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Abkürzend bezeichnen wir die rechte Seite von (7) mit $F(\Pi)$; ferner setzen wir:

$$A^2 \cdot \varepsilon\,\mu = \frac{1}{a^2}$$

und

$$\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} = \sigma,$$

a ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störungen in einem Medium mit den Konstanten ε und μ; σ ist der reziproke Wert der Relaxationszeit. Setzen wir ferner $\Pi = f(t) \cdot \Pi_1$ in (7) ein, wo $f(t)$ nur von t, Π_1 nur von u und v abhängt, so zerfällt (7) in die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{a^2}\frac{\partial f}{\partial t} = + n^2 f \tag{8}$$

und

$$F(\Pi_1) - n^2 \Pi_1 = 0, \tag{9}$$

hierin ist n^2 eine noch zu bestimmende Konstante.

Seien Π'_{1n} und Π'_{2n} zwei Lösungen von (9) für bestimmte Werte n, so stellen sich unsere Kräfte X, Y, Z durch die Funktionen dar: im Leiter

$$\Pi_\varrho = e^{-\frac{\sigma}{2}\cdot t} \sum_n \left(\mathfrak{A}_n \cdot \Pi'_{1n}\, e^{+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4a^2n^2}\,\cdot t} + \mathfrak{B}_{2n} \cdot \Pi'_{2n}\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4a^2n^2}\,\cdot t} \right), \tag{10}$$

im Isolator ($\sigma = 0$)

$$\Pi_3 = \sum_n \mathfrak{A}_n\, \Pi_{1n}\, e^{+ant} + \mathfrak{B}_n\, \Pi_{2n}\, e^{-ant}. \tag{11}$$

Die Summation erstreckt sich auf alle sich später ergebenden Werte n.

Die partielle Differentialgleichung (9) wollen wir nun für ein verlängertes Rotationsellipsoid bilden. Wir führen als unabhängige Koordinaten (u, v) die großen Halbachsen (x und y) der konfokalen Ellipse und Hyperbel ein, die sich in dem betrachteten Punkte der Meridianebene schneiden.[1]) Ist ϱ' der senkrechte Abstand dieses Punktes von der Rotationsachse und z sein senkrechter Abstand von der Äquatorebene, so bestehen die Beziehungen:

$$\varrho' \cdot e = \sqrt{x^2 - e^2}\,\sqrt{e^2 - y^2}$$
$$z \cdot e = x \cdot y,$$

hierin ist e die geometrische Exzentrizität, die wir jetzt gleich eins setzen wollen. Durch Bildung des Bogenelementes:

$$ds^2 = dz^2 + d\varrho'^2 + \varrho'^2\, dw^2 = \frac{dx^2}{U^2} + \frac{dy^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

gelangt man zu den Ausdrücken:

$$U = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad V = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad W = \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-y^2}}.$$

Setzt man diese Werte in (9) ein, so erhält man:

[1]) Siehe Abraham, Dissertation. Berlin 1897.

$$n^2 \Pi (x^2 - y^2) = (x^2 - 1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}.$$

Diese Gleichung kann durch das Produkt:

$$\Pi = \xi(x) \cdot \eta(y)$$

gelöst werden, da der Faktor von $n^2 \Pi$ sich als Differenz einer Funktion von x und einer Funktion von y darstellt und außerdem der Faktor von $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ nur von x, der Faktor von $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}$ nur von y abhängt.[1]) Die Funktionen ξ und η sind dann durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d x^2} + \xi \left(- n^2 - \frac{\vartheta}{x^2 - 1} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 \eta}{d y^2} + \eta \left(- n^2 + \frac{\vartheta}{1 - y^2} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

ϑ ist eine zunächst willkürliche Konstante, die erst später bestimmt werden wird. Die Differentialgleichung für ξ und η ist dieselbe; wir wollen nun die Eigenschaften ihrer Integrale näher untersuchen.

§ 2.

Die Integrale im Endlichen.

Unsere Differentialgleichung (12) hat zwei im Endlichen gelegene singuläre Punkte $x = \pm 1$, für welche wir die zugehörigen Fundamentalsysteme aufstellen wollen. Wir bringen zunächst die Differentialgleichung für die Stelle $x = +1$ auf die Frobeniussche Normalform $P[1 - x]$,[2]) indem wir mit Vorteil nach Potenzen von $(1 - x)$ entwickeln. Dann lautet die charakteristische Funktion:

$$P[(1 - x)^\varrho] = \sum_{\lambda = 0}^{3} f_\lambda(\varrho) (1 - x)^{\varrho + \lambda},$$

[1]) Vgl. H. Weber, Math. Ann. Bd. I.

[2]) Bezeichnung nach Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

wobei

$$f_0(\varrho) = 2\,\varrho\,(\varrho - 1)$$
$$f_1(\varrho) = -\,\varrho\,(\varrho - 1) + \vartheta$$
$$f_2(\varrho) = -\,4\,n^2$$
$$f_3(\varrho) = 6\,n^2$$

ist.

Die Fuchssche determinierende Fundamentalgleichung ist demnach:

$$f_0(\varrho) = 2\,\varrho\,(\varrho - 1) = 0.$$

Da sich ihre Wurzeln $\varrho = 0$ und $\varrho = +1$ um eine ganze Zahl unterscheiden, muß untersucht werden, ob in den Integralen Logarithmen auftreten. Wie später gezeigt werden soll, sind die Integrale nur dann frei von Logarithmen, wenn die Konstante $\vartheta = 0$ ist; es ergeben sich dann die beiden evidenten Integrale e^{+nx} und e^{-nx}.

Nehmen wir dagegen ϑ von Null verschieden an, so lautet das zu $x = +1$ gehörige Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned}\xi_{10} &= a_{00} + a_{01}(1-x) + a_{02}(1-x)^2 + \cdots + \xi_{11}\cdot\lg(1-x)\\ \xi_{11} &= (1-x)\,[a_{10} + a_{11}(1-x) + a_{12}(1-x)^2 + \cdots].\end{aligned} \tag{13}$$

Diese Reihen konvergieren innerhalb eines Kreises, der, um $x = +1$ geschlagen, durch den Punkt $x = -1$ hindurchgeht.

Für die singuläre Stelle $x = -1$ ergibt sich die charakteristische Funktion:

$$P[(1+x)^\varrho] = \sum_{\lambda=0}^{3} f_\lambda'(\varrho)\,(1+x)^{\varrho+\lambda},$$

wobei jetzt

$$f_0'(\varrho) = -\,2\,\varrho\,(\varrho - 1)$$
$$f_1'(\varrho) = \varrho\,(\varrho - 1) - \vartheta$$
$$f_2'(\varrho) = +\,4\,n^2$$
$$f_3'(\varrho) = -\,6\,n^2$$

zu setzen ist.

Die determinierende Fundamentalgleichung ist wieder $\varrho\,(\varrho - 1) = 0$ und die Bedingung für das Auftreten von Loga-

rithmen ist wieder $\vartheta \neq 0$. Wir haben daher für das Innere eines Kreises mit dem Radius zwei und dem Mittelpunkte $x = -1$ die beiden Fundamentalintegrale:

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= b_{00} + b_{01}(1+x) + b_{02}(1+x)^2 + \cdots + \xi_{21}\lg(1+x),\\ \xi_{21} &= (1+x)[b_{10} + b_{11}(1+x) + b_{12}(1+x)^2 + \cdots].\end{aligned} \tag{14}$$

Um die Reihenkoeffizienten $a_{1\nu}$ zu erhalten, bildet man zunächst die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} f_0(\varrho+\nu) &= g_{\nu\nu}(\varrho) = 2(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)\\ f_1(\varrho+\nu-1) &= g_{\nu,\nu-1}(\varrho) = -(\varrho+\nu-1)(\varrho+\nu-2)+\vartheta\\ f_2(\varrho+\nu-2) &= g_{\nu,\nu-2}(\varrho) = -4n^2\\ f_3(\varrho+\nu-3) &= g_{\nu,\nu-3}(\varrho) = 6n^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Bedeutet dann $h_\nu(\varrho)$ die Determinante:

$$h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} g_{10}(\varrho) & g_{11}(\varrho) & 0 & 0\ldots 0\\ g_{20}(\varrho) & g_{21}(\varrho) & g_{22}(\varrho) & 0\ldots 0\\ \vdots & & & \\ g_{\nu-1,0}(\varrho) & g_{\nu-1,1}(\varrho) & \ldots & \ldots\ g_{\nu-1,\nu-1}(\varrho)\\ g_{\nu 0}(\varrho) & g_{\nu 1}(\varrho) & \ldots & \ldots\ g_{\nu,\nu-1}(\varrho) \end{vmatrix}$$

so erhält man die $a_{1\nu}$ aus den Gleichungen:

$$a_{1\nu} = \frac{(-1)^\nu a_{10}(\varrho)\, h_\nu(\varrho)}{g_{11}(\varrho)\, g_{22}(\varrho)\ldots g_{\nu\nu}(\varrho)},\quad \nu = 0, 1, 2, 3\ldots,$$

wobei $\varrho = +1$ zu setzen ist.

Die Koeffizienten $a_{0\nu}$ erhält man aus den $a_{1\nu}$, indem man die $a_{1\nu}$ nach ϱ differentiiert und dann $\varrho = 0$ setzt; hiebei ist $a_{10}(\varrho)$ so zu wählen, daß sämtliche $a_{0\nu}$ endlich bleiben.

In derselben Weise wie die $a_{1\nu}$ erhält man die $b_{1\nu}$; an Stelle von (15) sind hier die Ausdrücke

$$\begin{aligned} f_0'(\varrho+\nu) &= g_{\nu\nu}'(\varrho) = -2(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)\\ f_1'(\varrho+\nu-1) &= g_{\nu,\nu-1}'(\varrho) = (\varrho+\nu-1)(\varrho+\nu-2) - \vartheta\\ f_2'(\varrho+\nu-2) &= g_{\nu,\nu-2}'(\varrho) = 4n^2\\ f_3'(\varrho+\nu-3) &= g_{\nu,\nu-3}'(\varrho) = -6n^2 \end{aligned} \tag{16}$$

zu setzen.

Es soll nun noch die Bedingung für das Auftreten von logarithmenfreien Integralen gegeben werden.

Zur größten Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung $\varrho = +1$ gehört stets ein logarithmenfreies Integral (ξ_{11}). Das zu $\varrho = 0$ gehörige Integral enthält dann keinen Logarithmus, wenn die Determinante:

$$[h_1(\varrho)]_{\varrho=0} = 0$$

ist, also wenn:

$$[g_{10}(\varrho)]_{\varrho=0} = [-\varrho(\varrho-1)+\vartheta]_{\varrho=0} = \vartheta = 0$$

ist. Die Integrale sind dann e^{+nx} und e^{-nx}.

Durch Vergleichung der Ausdrücke (15) und (16) erkennt man, daß die in gleicher Weise gebildeten Koeffizienten $a_{1\nu}$ und $b_{1\nu}$ einander gleich sein müssen. Selbstverständlich müssen dann auch die $a_{0\nu}$ und $b_{0\nu}$, welche sich durch dieselbe Rechnung aus den $a_{1\nu}$ resp. $b_{1\nu}$ ergeben, einander gleich sein.

Es stellen sich demnach unsere Integrale (13) und (14) in der folgenden einfachen Form dar:

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu} + \xi_{11}\lg(1-x) \\ \xi_{11} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(1-x)^{1+\nu} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \xi_{20} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1+x)^{\nu} + \xi_{21}\lg(1+x) \\ \xi_{21} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(1+x)^{1+\nu}. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch Vertauschung von $+x$ mit $-x$ gehen also die Integrale (17) in die Integrale (18) über, was auch a priori aus der Differentialgleichung (12) ersichtlich ist, die bei einer Vertauschung von $+x$ mit $-x$ ungeändert bleibt.

Aus der Eigenschaft des Fundamentalsystems folgt, daß zwischen den Integralen (17) und (18) innerhalb des gemeinsamen Konvergenzgebietes die Beziehungen bestehen müssen:

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= \alpha\, \xi_{20} + \beta\, \xi_{21}, \\ \xi_{11} &= \gamma\, \xi_{20} + \delta\, \xi_{21}, \end{aligned} \tag{19}$$

hierin sind α, β, γ und δ konstante Koeffizienten, welche sich im allgemeinen als unendliche Reihen darstellen. Da in unserem Falle die Konvergenzkreise der Reihen (17) und (18) ein Gebiet gemeinsam haben, so kann man diese Koeffizienten hier ohne weiteres finden.

Setzen wir beispielsweise in der zweiten Gleichung (19) $x = 0$, so erhalten wir:

$$\xi_{11}(0) = \gamma \cdot \xi_{20}(0) + \delta\, \xi_{21}(0)$$

und durch Differentiation nach x:

$$\xi'_{11}(0) = \gamma\, \xi'_{20}(0) + \delta\, \xi'_{21}(0).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} \xi_{11}(0) & \xi_{21}(0) \\ \xi'_{11}(0) & \xi'_{21}(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{20}(0) & \xi_{21}(0) \\ \xi'_{20}(0) & \xi'_{21}(0) \end{vmatrix}}.$$

$$\gamma = \frac{2 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+\nu) \cdot a_{1\nu}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+\nu)\, a_{1\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu\, a_{0\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} \right)}.$$

Der Koeffizient γ ist also sicher von Null verschieden.

Wir untersuchen nun, ob es möglich ist, die in unserer Differentialgleichung auftretende Konstante ϑ so zu bestimmen, daß sich wenigstens eine partikuläre Lösung als überall im Endlichen konvergente Reihe darstellt.

Soll dies der Fall sein, so kann sich nur die Potenzreihe ξ_{11} in ξ_{21} fortsetzen. Wir machen also:[1])

[1]) Vgl. Lindemann, Sitzungsber. d. K. B. Akad. d. Wissensch. 1903, Bd. 33, pag. 34 u. 56.

$$\gamma = 0, \tag{20}$$

woraus folgt:

$$\xi_{11} = \delta\, \xi_{21}; \tag{21}$$

lassen wir nun die Variable x einen Umlauf um den Punkt $x = +1$ machen, so bleibt ξ_{11} ungeändert; wegen (21) können wir auch um $x = -1$ herumgehen, ohne daß sich ξ_{11} ändert. Selbstverständlich kann sich ξ_{11} auch nicht ändern, wenn man um irgend einen regulären Punkt $x = x_0$ herumgeht. ξ_{11} ist also eindeutig für alle endlichen Werte von x, läßt sich daher nach dem Cauchyschen Integralsatze in eine überall im Endlichen konvergente Reihe entwickeln; ξ_{11} ist eine ganze transzendente Funktion.

Die Gleichung $\gamma = 0$ ist eine transzendente Gleichung zur Bestimmung der Konstanten ϑ.

Wir haben somit eine Möglichkeit gefunden, daß sich für bestimmte Werte von ϑ ein partikuläres Integral unserer Differentialgleichung durch eine überall im Endlichen gültige Formel darstellen läßt.

Den Koeffizienten δ erhält man nun aus (21), indem man $x = 0$ setzt:

$$\xi_{11}(0) = \delta\, \xi_{21}(0)$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} = \delta \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu},$$

also

$$\delta = +1.$$

Es ist daher:

$$\xi_{11}(x) = +\,\xi_{21}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(1-x)^{1+\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(1+x)^{1+\nu}$$

$\xi_{11}(x)$ ändert sich also nicht bei Vertauschung von $x = +1$ mit $x = -1$, sie ist eine gerade Funktion und muß sich in der Form:

$$\xi_{11}(x) = \sum_{0}^{\infty} k_i\, x^{2i} = (1-x^2)\sum_{0}^{\infty} k_i\, x^{2i}$$

darstellen lassen.

Es gibt also hier nur Schwingungen geraden Charakters, während nach Herrn Abraham[1]) gerade und ungerade Schwingungen auftreten sollen.

Um nun auch das zweite partikuläre Integral ξ_{10} durch eine allgemein gültige Formel darzustellen, bestimmen wir zunächst die Koeffizienten der Substitution:

$$\xi_{10}(x) = \alpha\,\xi_{20}(x) + \beta\,\xi_{21}(x).$$

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\xi'_{10}(x) = \alpha\,\xi'_{20}(x) + \beta\,\xi'_{21}(x).$$

Nun ist $\xi_{21} = \xi_{11}$ eine gerade Funktion von x, also $\xi'_{21}(0) = 0$, folglich ist für $x = 0$:

$$\xi_{10}(0) = \alpha\,\xi_{20}(0) + \beta\,\xi_{21}(0)$$
$$\xi'_{10}(0) = \alpha\,\xi'_{20}(0)$$

oder nach (17) und (18)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu} = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu} + \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}$$

$$\left(-\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu\, a_{0\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}\right) = \alpha\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu\, a_{0\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}\right].$$

Hieraus folgt:

$$\alpha = -1$$
$$\beta = -\frac{2\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}}.$$

Somit erhalten wir:

$$\xi_{10}(x) = -\,\xi_{20}(x) + \beta\,\xi_{21}(x)$$

oder

$$\xi_{10}(x) + \xi_{20}(x) = \beta\,\xi_{21}(x)$$

gleich einer ganzen transzendenten Funktion.

[1]) Abraham, Ann. d. Phys. 1898, Bd. 66, pag. 446.

Hieraus folgt, daß in dem Ausdruck:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu} + \xi_{11}\lg(1-x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1+x)^{\nu} + \xi_{21}\lg(1+x)$$

der an der Stelle $x = -1$ liegende singuläre Punkt von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu}$ aufgehoben wird durch das Glied $\xi_{21}\lg(1+x)$, oder daß die Funktion:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu} + \xi_{21}\lg(1+x)$$

an der Stelle $x = -1$ keinen singulären Punkt mehr hat; dann hat sie aber überhaupt keinen solchen Punkt mehr im Endlichen; es ist folglich:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu} + \xi_{21}\lg(1+x) = G(x)$$

gleich einer ganzen transzendenten Funktion.

Ebenso ist:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1+x)^{\nu} + \xi_{11}\lg(1-x) = G(-x)$$

eine ganze transzendente Funktion und

$$G(x) + G(-x) = \beta\,\xi_{21}(x).$$

Wir erhalten daher:[1])

$$\begin{aligned}\xi_{10}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1-x)^{\nu} + \xi_{11}\cdot\lg(1-x)\\ &= G(x) + \xi_{11}\lg\frac{1-x}{1+x}\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\xi_{20}(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{0\nu}(1+x)^{\nu} + \xi_{21}\lg(1+x)\\ &= G(-x) + \xi_{21}\lg\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned} \tag{23}$$

[1]) Diese Darstellungen von ξ_{10} und ξ_{20} wurden mir von Herrn Professor Lindemann freundlichst überlassen.

Diese Funktionen gelten in der ganzen Ebene, da $\xi_{11}(x) = \xi_{21}(\nu)$ und $G(x)$ ganze transzendente Funktionen sind.

Da ξ_{10} und ξ_{20} Logarithmen enthalten, so liefern uns die Bedingungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$ keine weiteren Darstellungen von eindeutigen Integralen, und ist überhaupt jede Fortsetzung von ξ_{11}, bei der γ und δ von Null verschieden wären, für unsere Aufgabe nicht brauchbar.

Es kommen also nur die Integrale:

$$\xi_{11} = \xi_{21} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}(1-x)^{1+\nu}$$

und

$$\xi_{10} = G(x) + \xi_{11} \lg \frac{1-x}{1+x} \tag{24}$$

in Betracht.

Von diesen Integralen dürfen wir ferner nur diejenigen nehmen, für welche unsere Ausdrücke für die Kräfte nirgends im Endlichen unendlich werden.

Wir hatten (5) und (6):

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-y^2}}\left(\varepsilon A \frac{\partial \Pi}{\partial t} + 4\pi\lambda A \cdot \Pi\right) \\ X &= +\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial v} \\ Y &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial u} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Bis auf einen Faktor, welcher die Zeit enthält, ist (für einen bestimmten Wert ϑ und n):

$$\Pi = \xi\cdot\eta, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \xi\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u} = \eta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Für $y = \pm 1$ wird der Nenner in N und Y gleich Null; $y = \pm 1$ entsprechen die Punkte der Rotationsachse von den Brennpunkten bis ins Unendliche. Wir müssen daher η im Innern und Äußern unseres Leiters so wählen, daß an der

Stelle $y = \pm 1$ η verschwindet und $\frac{d\eta}{dy}$ endlich bleibt. Diesen Forderungen entspricht das Integral:

$$\eta_{11} = \eta_{21} = (1-y)\,[a_{10} + a_{11}(1-y) + a_{12}(1-y^2) + \cdots].$$

Das zweite partikuläre Integral η_{10} ist im Innern und Äußern nicht brauchbar.

Für $x = \pm 1$ wird N und X unendlich; dies sind die Punkte der Rotationsachse zwischen den beiden Brennpunkten und liegen demnach ganz im Innern des Leiters. Hier kommt also auch nur das Integral $\xi_{11} = \xi_{21}$ in Betracht. Im Äußern dagegen kann auch das zweite partikuläre Integral:

$$\begin{aligned}\xi_{10} &= a_{00} + a_{01}(1-x) + a_{02}(1-x)^2 + \cdots + \xi_{11}\lg(1-x)\\ &= G(x) + \xi_{11}\lg\frac{1-x}{1+x}\end{aligned}$$

auftreten.

Wir setzen nun für einen bestimmten Wert ϑ (Index s) und n (Index n):

$$\left.\begin{aligned}\xi^n_s &= \xi_{11} = \xi_{21} = (1-x)(a_{10} + a_{11}(1-x) + a_{12}(1-x)^2 + \cdots)\\ \eta^n_s &= \eta_{11} = \eta_{21} = (1-y)(a_{10} + a_{11}(1-y) + a_{12}(1-y)^2 + \cdots)\\ \xi^n_{1s} &= \xi_{10} = G(x) + \xi_{11}\lg\frac{1-x}{1+x}.\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

ξ^n_{s1} und η^n_{s1} seien die den ξ^n_s und η^n_s entsprechenden Werte für das Innere.

Die Funktion Π stellt sich demnach jetzt folgendermaßen dar. Im Leiter, d. h. im Innern des Ellipsoids ist:

$$\Pi_L = e^{-\frac{\sigma}{2}t}\sum_n\sum_s\left(A^n_{s1}\,e^{\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4a_1^2n_1^2}\cdot t} + B^n_{s1}\,e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4a_1^2n_1^2}\cdot t}\right)\xi^n_{s1}\,\eta^n_{s1}, \quad (27)$$

im Isolator, d. h. im Äußern, dagegen ist:

$$\begin{aligned}\Pi_J = &\sum_s\sum_n (A^n_s\,e^{+at} + B^n_s\,e^{-at})\,\xi^n_s\,\eta^n_s\\ &+ \sum_s\sum_n (C^n_s\,e^{+at} + D^n_s\,e^{-at})\,\xi^n_{1s}\,\eta^n,\end{aligned} \quad (28)$$

denn für das Äußere muß $\lambda = 0$ genommen werden und die Konstanten a und n haben hier andere Werte als im Innern.

Die Summation erstreckt sich über alle sich ergebenden Werte ϑ und n.

Im Endlichen sind also durch (26) die geeigneten Integrale überall bestimmt; im nächsten Paragraphen soll dann untersucht werden, wie sich die Integrale im Unendlichen verhalten.

Es soll jedoch vorher noch die Entwicklung einer Funktion $f(y)$ nach Funktionen η_s^n gegeben werden, da wir die sich ergebende Formel für die Entwicklung einer Konstanten $[f(y) = 1]$ später brauchen werden. Es seien η_s und η_t zwei Integrale unserer Differentialgleichung, die sich auf denselben Index n, aber auf verschiedene Werte der Konstanten ϑ beziehen. Wir multiplizieren nun in bekannter Weise die Differentialgleichung mit $\eta_t \cdot dy$ und integrieren von -1 bis $+1$:[1])

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2\eta_s}{dy^2} \cdot \eta_t \cdot dy = -\int_{-1}^{+1} \left(-n^2 + \frac{\vartheta_s}{1-y^2}\right) \eta_s \cdot \eta_t \, dy, \qquad (29)$$

ferner ist:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2\eta_s}{dy^2} \cdot \eta_t \, dy = \left[\frac{d\eta_s}{dy} \cdot \eta_t - \eta_s \cdot \frac{d\eta_t}{dy}\right]_{-1}^{+1} + \int \frac{d^2\eta_t}{dy^2} \cdot \eta_s \, dy.$$

Nach (21) verschwinden η_s und η_t für $y = \pm 1$, daher ist:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^2\eta_s}{dy^2} \cdot \eta_t \cdot dy = \int_{-1}^{+1} \frac{d^2\eta_t}{dy^2} \cdot \eta_s \, dy$$

oder aus (29)

$$\int_{-1}^{+1} \left[-n^2 + \frac{\vartheta_s}{1-y^2}\right] \eta_s \cdot \eta_t \, dy = \int_{-1}^{+1} \left[-n^2 + \frac{\vartheta_t}{1-y^2}\right] \eta_s \cdot \eta_t \cdot dy.$$

[1]) Vgl. Abraham, Ann. d. Physik 1898, pag. 447.

Hieraus folgt, daß bei gleichem n und, wenn $\vartheta_t \neq \vartheta_s$ ist,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta_s \eta_t}{1-y^2}\, dy = 0 \tag{30}$$

sein muß; während für $\vartheta_s = \vartheta_t$ dieses Integral von Null verschieden ist.

Aus der Formel (30) leitet man die Reihenkoeffizienten für die Entwicklung einer Funktion $f(y)$ nach Funktionen η_n^s ab; setzt man:

$$f(y) = \sum_s D_s \eta_s^n(y),$$

so werden die D_s bestimmt durch:

$$D_s \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(\eta_s^n)^2}{1-y^2}\, dy = \int_{-1}^{+1} \frac{f(y)\, \eta_s^n}{1-y^2} \cdot dy.$$

Ist speziell $f(y) = 1$ und setzen wir:

$$1 = \sum_s \delta_s^n \eta_s^n(y), \tag{31}$$

so ergibt sich δ_s^n aus:

$$\delta_s^n \int_{-1}^{+1} \frac{(\eta_s^n)^2}{1-y^2}\, dy = \int_{-1}^{+1} \frac{\eta_s^n}{1-y^2}\, dy. \tag{32}$$

§ 3.

Das Verhalten der Integrale im Unendlichen.

Der Punkt $x = \infty$ ist für unsere Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}(x^2-1) - \xi\,[n^2(x^2-1) + \vartheta] = 0$$

ein Stelle der Unbestimmtheit, wie man sofort daraus ersieht, daß die Koeffizienten von $\frac{d^2\xi}{dx^2}$ und ξ von gleichem Grade in x sind, wenn n^2 von Null verschieden ist.

Man kann daher hier keine determinierende Fundamentalgleichung aufstellen, sondern muß nach den Methoden von Thomé und Poincaré[1]) untersuchen, ob unsere Differentialgleichung konvergente Normalintegrale zuläßt. Dies sind Reihen von der Form:

$$e^{Q} \cdot x^{m} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots \right),$$

worin Q ein ganzes Polynom. von x, dessen Grad die Ordnung des Normalintegrals angibt; e^{Q} heißt der determinierende Faktor des Normalintegrals.

Die Normalreihen sind nur unter besonderen Bedingungen konvergent, sie stellen jedoch auch im Falle der Divergenz das Verhalten der Integrale für unendlich große Werte von x dar, indem sie sich dann der Funktion $e^{Q} \cdot x^{m}$ asymptotisch nähern.

Man erhält die Normalreihen durch die Laplacesche Transformation:

$$\xi(x) = \int_L e^{Q \cdot z} \cdot u(z)\, dz,$$

die wir nun auch auf unsere Gleichung anwenden werden.

Wir machen zunächst die Substitution[2]):

$$\xi = (1 - x^2) \cdot v(x) \tag{33}$$

und setzen $n \cdot x = t$; wir erhalten:

$$(n^2 - t^2) \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - 4t \frac{dv(t)}{dt} + \left[\vartheta - 2 - (n^2 - t^2) \right] v(t) = 0 = \psi(v, t) \tag{34}$$

Ferner setzen wir:

$$v(t) = \int_L e^{t \cdot z} \cdot u(z)\, dz \tag{35}$$

in (34) ein und erhalten:

---

[1]) American Journal Bd. 7 und Acta mathematica Bd. 8.
[2]) Vgl. Abraham, Math. Ann. Bd. 52.

$$\psi(v,t) = \int_L \frac{d}{dz} V(t,z)\, dz$$
$$+ \int_L e^{tz} \cdot \left[\frac{d^2 u}{dz^2}(z^2-1) - [\vartheta + n^2(z^2-1)]\, u(z) \right] dz.$$

$v(t)$ ist also ein Integral von (34), wenn $u(z)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u}{dz^2}(z^2-1) - [\vartheta + n^2(z^2-1)]\, u(z) = 0 \qquad (36)$$

genügt und wenn ferner der Integrationsweg L so gewählt wird, daß:

$$\int_L \frac{d}{dz} V(t,z)\, dz$$
$$= \int_L \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \left(t \cdot u(z) - \frac{du(z)}{dz} \right) e^{tz} - 2z \cdot u(z) e^{tz} \right] dz \qquad (37)$$

verschwindet. Letzteres tritt beispielsweise ein, wenn $V(t,z)$ im Anfangs- und Endpunkte von L verschwindet.

Der Koeffizient von $\frac{d^2 u}{dz^2}$ in (36) ist vom selben Grade in z wie die Ordnung der Differentialgleichung; in diesem Falle muß man Integrationswege anwenden, deren Endpunkte, oder auch Anfangs- und Endpunkte im Unendlichen liegen. Poincaré hat untersucht, wie sich der Ausdruck $e^{tz} \cdot u(z)$, der auch $V(t,z)$ bestimmt, im Unendlichen verhält. Entwickelt man nämlich die Koeffizienten der Laplaceschen Transformierten (36) nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{z}$, so ergibt sich:

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} - \left[n^2 + \vartheta \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots \right) \right] u(z) = 0.$$

Der Koeffizient von $u(z)$ ist vom nullten Grade in z, die Differentialgleichung ist daher vom Range eins. Durch Weglassen der mit $z = \infty$ verschwindenden Glieder erhält man die abgekürzte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u_1(z)}{dz^2} - n^2 u_1(z) = 0.$$

Setzt man hierin $u_1(z) = e^{c \cdot z}$, so erhält man die charakteristische Gleichung:

$$c^2 - n^2 = 0, \tag{38}$$

ihre Wurzeln $c_1 = +n$, $c_2 = -n$ sind nichts anderes als die singulären Punkte von (34).

Nach Poincaré ist nun:

$$\lim_{z=+\infty} \frac{u'(z)}{u(z)} = c_1,$$

wobei $u'(z)$ für $\frac{du(z)}{dz}$ gesetzt ist; c_1 ist im allgemeinen diejenige Wurzel von (38), welche den größten reellen Teil besitzt. Rückt ferner z mit dem Argumente $\lambda = e^{iw}$ ins Unendliche, so ist:

$$\lim_{\substack{z=\varrho\cdot\lambda \\ \varrho=\infty}} \frac{u'(z)}{u(z)} = \lambda c_1, \tag{39}$$

wo jetzt λc_1 diejenige Wurzel der Gleichung $c^2 - \lambda^2 n^2 = 0$ ist, deren reeller Teil den größten Wert hat.

Aus (39) folgt weiter:

$$\lim_{\substack{z=\varrho\lambda \\ \varrho=\infty}} u(z) \cdot e^{-az} = 0, \tag{40}$$

wenn a eine Zahl bedeutet, für welche

$$\Re(a e^{iw}) > \Re(c_\varkappa e^{iw}) \quad \varkappa = 1, 2.$$

$\Re$ bedeutet reeller Teil, c_1 und c_2 sind die Wurzeln von (38).

Oder es ist auch:

$$\lim_{\substack{z=\varrho e^{iw} \\ \varrho=\infty}} u(z) \cdot e^{tz} = 0, \tag{41}$$

wenn

$$\Re(-t e^{iw}) < \Re(-c_\varkappa e^{iw}) \quad \varkappa = 1, 2 \tag{42}$$

ist. Nehmen wir speziell das Argument $w = \pi$, so geht (42) über in:

$$\Re(t) > \Re(c_\varkappa) \quad \varkappa = 1, 2.$$

In unserem Falle ist $c_1 = +n$ die Wurzel mit dem größten reellen Teil, wenn wir voraussetzen, daß der reelle Teil von n positiv sein soll. Setzen wir schließlich wieder $t = n \cdot x$, so erhalten wir das Resultat:

$$\lim_{z=-\infty} u(z)\, e^{n \cdot x \cdot z} = 0, \tag{43}$$

wenn

$$\Re(x) > 1 \tag{44}$$

ist.

Unter derselben Bedingung (44) verschwindet dann auch der Grenzwert des Ausdrucks:

$$V(x\,z) = (1 - z^2)\left[n \cdot x\, u(z) - \frac{d\,u(z)}{d\,z}\right] e^{n\,x\,z} - 2\,z\,u(z)\, e^{n\,x\,z}$$

für $z = -\infty$, folglich auch die linke Seite von (37).

Die Differentialgleichung (36) für $u(z)$ stimmt genau mit unserer ursprünglichen Gleichung (12) für ξ überein, wir können daher die Integrale $u(z)$ durch die im vorigen Paragraphen gefundenen Integrale $\xi(z)$ ersetzen. Der Ausdruck $V(y, z)$ verschwindet dann für $z = +1$, wenn wir

$$u(z) = \xi_{11}(z) = (1 - z)\,(a_{10} + a_{11}(1 - z) + a_{12}(1 - z)^2 + \cdots)$$

setzen und ferner für $z = -1$, wenn

$$u(z) = \xi_{21}(z) = (1 + z)\,(a_{10} + a_{11}(1 + z) + a_{12}(1 + z)^2 + \cdots)$$

gesetzt wird.

Wir erhalten daher zwei Integrale, welche formal unserer Differentialgleichung (34) genügen, indem wir bilden:

$$\begin{aligned} j_{11}(x) &= \int_{+1}^{-\infty} \xi_{11}(z) \cdot e^{n\,x\,z}\, d\,z \\ j_{21}(x) &= \int_{-1}^{-\infty} \xi_{21}(z) \cdot e^{n\,x\,z}\, d\,z. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Integrale wollen wir nun weiter ausrechnen. Setzen wir für ξ_{11} seinen Wert ein, so konvergiert derselbe zunächst nur innerhalb eines Kreises, der mit dem Radius zwei um $x = +1$ geschlagen ist.

Integrieren wir das Produkt dieser Reihe mit e^{nxz} trotzdem bis ins Unendliche, so werden wir im allgemeinen eine divergente Reihe erhalten. Eine konvergente Reihe erhält man nur dann, wenn die Reihe $\xi_{11}(z)$ überall gleichmäßig und unbedingt konvergiert; es müßte also ξ_{11} eine ganze transszendente Funktion sein, wie sie nach obigem durch die transszendente Gleichung $\gamma = 0$ bestimmt wurde.

Wir führen die Integration zunächst rein formal aus und bilden:

$$j_{11}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} \int_{+1}^{-\infty} (1-z)^{1+\nu} e^{nxz}\, dz,$$

indem wir setzen:

$$n(1-z)\cdot x = s.$$

Es ist dann:

$$j_{11}(x) = -(nx)^{-2}\cdot e^{nx}\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}\cdot (nx)^{-\nu}\cdot \int_0^{\infty} s^{1+\nu}\cdot e^{-s}\cdot ds.$$

Nun ist aber nach einer bekannten Formel:

$$\int_0^{\infty} e^{-s}\cdot s^{\varrho-1}\, ds = \Gamma(\varrho),$$

also auch

$$\int_0^{\infty} e^{-s}\cdot s^{1+\nu}\, ds = \Gamma(\nu+2).$$

Wir erhalten somit:

$$j_{11}(x) = -(nx)^{-2}\cdot e^{nx}\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu}\cdot (nx)^{-\nu}\cdot \Gamma(\nu+2). \qquad (46)$$

Dies ist die zu dem fundamentalen determinierenden Faktor e^{+nx} gehörige Normalreihe. Für sehr große Werte von x erhält man den asymptotischen Wert $-a_{10}(nx)^{-2}\cdot e^{nx}$ für $j_{11}(x)$.

Ist ξ_{11} eine ganze transzendente Funktion, so konvergiert unsere Normalreihe nach 44 für $x > 1$. Im vorigen Paragraphen wurde die Bedingung aufgestellt, unter welcher ξ_{11} eine ganze transszendente Funktion ist, nämlich:

$$\gamma = 0,$$

dann war auch $\xi_{21} \cdot \delta = \xi_{11}$, wo $\delta = +1$ ist.

In derselben Weise erhält man das zum fundamentalen determinierenden Faktor e^{-nx} gehörige Normalintegral:

$$\begin{aligned} j_{21}(x) &= \int_{-1}^{\infty} \xi_{21}\, e^{nxz}\, dz \\ &= (nx)^{-2} \cdot e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{1\nu} (-1)^{\nu} (nx)^{-\nu} \Gamma(\nu + 2), \end{aligned} \qquad (47)$$

welches unter derselben Bedingung konvergiert wie $j_{11}(x)$.

Wir haben somit zwei Normalintegrale j_{11} und j_{21} erhalten, welche linear unabhängig voneinander sind und daher ein Fundamentalsystem bilden. Mit wachsendem Argumente x nähern sie sich den Funktionen $-e^{+nx}(nx)^{-2}$ resp. $+e^{nx}(nx)^{-2}$.

Wie wir früher gesehen, verschwindet die Funktion $\xi_{11}(z)$ unter der Bedingung $\gamma = 0$ sowohl für $z = +1$ als auch für $z = -1$. Daher können wir auch noch folgendes Integral bilden:

$$\begin{aligned} J &= \int_{+1}^{-1} \xi_{11}(z)\, e^{nxz}\, dz \\ &= \int_{+1}^{-\infty} \xi_{11}(z)\, e^{nxz}\, dz - \int_{-1}^{-\infty} \xi_{11}(z)\, e^{nxz}\, dz \end{aligned} \qquad (48)$$

oder wegen $\xi_{11}(z) = \xi_{21}(z)$:

$$\begin{aligned} J &= \int_{+1}^{-\infty} \xi_{11}(z)\, e^{nxz}\, dz - \int_{-1}^{-\infty} \xi_{21}(z)\, e^{nxz}\, dz \\ &= j_{11} - j_{21}. \end{aligned} \qquad (49)$$

Dieses Integral J, welches sich linear aus den Integralen j_{11} und j_{21} zusammensetzt, gilt für alle endlichen Werte von x, es ist also eine ganze transzendente Funktion.

Nun ist aber nach unserer Substitution (33) $(1 - x^2)\, J$ ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung (12), deren partikuläres Integral $\xi_{11}(x)$ unter der obigen Bedingung $\gamma = 0$ eine ganze transzendente Funktion ist, welche in den Punkten $x = \pm 1$ dasselbe Verhalten wie $(1 - x^2)\, J$ zeigt. Daher kann $(1 - x^2)\, J$ von $\xi_{11}(x)$ nur um einen konstanten Faktor verschieden sein. Es ist also:

$$\text{Const. } \xi_{11}(x) = (1 - x^2) \int_{+1}^{-1} \xi_{11}(z)\, e^{n x z}\, d z$$

oder

$$\text{Const. } \xi_{11}(x) = (1 - x^2)(j_{11} - j_{21}). \tag{50}$$

Die Gleichung (50) gibt uns den gesuchten Zusammenhang zwischen dem nur für endliche Werte gültigen Integral $\xi_{11}(x)$ und den in der Umgebung des unendlich fernen Punktes gültigen Normalreihen j_{10} und j_{20}. Für unendlich große Werte x können wir schreiben:

$$\text{Const. } \lim_{x=\infty} \xi_{11}(x) = -\frac{1}{n^2}(e^{+nx} + e^{-nx}). \tag{51}$$

Für das zweite partikuläre Integral von (12) ξ_{12}, welches ebenfalls für das Äußere unseres Leiters in Betracht kommt, läßt sich eine ähnliche Beziehung wie (50) nicht aufstellen. Nehmen wir an, daß im Unendlichen

$$\lim_{x=\infty} \xi_{12}(x) = R \cdot e^{nx} + R_1 \cdot e^{-nx}, \tag{52}$$

so bleiben die Konstanten R und R_1 für uns unbestimmt.

Nachdem wir nun über das Verhalten der Integrale im Unendlichen einigermaßen orientiert sind, wollen wir untersuchen, wie sich die elektrischen Wellen im Unendlichen fortpflanzen.

Die Kräfte waren dargestellt im Isolator durch die Funktion:

$$\Pi_J = \sum_s \sum_n (A_s^n\, e^{+ant} + B_s^n\, e^{-ant})\, \xi_s^n\, \eta_s^n$$
$$+ \sum_s \sum_n (C_s^n\, e^{+ant} + D_s^n\, e^{-ant})\, \xi_{1s}^n\, \eta_s^n.$$

Im Unendlichen können wir für ξ_s^n und ξ_{1s}^n ihre asymptotischen Werte (51) und (52) einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \Pi_J = &- \frac{1}{n^2} \sum_s \sum_n (A_s^n e^{+ant} + B_s^n e^{-ant})(e^{+nx} + e^{-nx}) \cdot \eta_s^n \\ &+ \sum_s \sum_n (C_s^n e^{+ant} + D_s^n e^{-ant})(R e^{nx} + R_1 e^{-nx}) \eta_s^n. \end{aligned} \tag{53}$$

Beim Ausmultiplizieren treten also Funktionen $e^{+n(x+at)}$ und $e^{+n(x-at)}$ auf, es findet Emission und Absorption zugleich statt. Sollen keine rückeilenden Wellen auftreten, so muß sein:

$$\sum_s \sum_n \frac{A_s^n}{n^2} - C_s^n R = 0$$

und

$$\sum_s \sum_n \frac{B_s^n}{n^2} - D_s^n R_1 = 0. \tag{54}$$

Wir werden im folgenden Paragraphen sehen, daß sich diese Bedingungen nur in einem ganz speziellen Falle mit den Grenzbedingungen des Problems vertragen.

§ 4.
Die Grenzbedingungen.

An der Oberfläche des Leiters ($x = x_0$) soll sein:

$$Y_L = Y_J, \quad N_L = N_J, \quad \varepsilon_L \frac{d X_L}{d t} = \varepsilon_J \frac{d X_J}{d t}, \tag{55}$$

hierbei bezieht sich der Index L auf den Leiter des Index J auf den Isolator.

Die Kräfte im Leiter resp. Isolator stellten sich dar durch die Funktionen:

$$\begin{aligned} \Pi_L = e^{-\frac{\sigma}{2}t} \sum_n \sum_s \Big(&A_{s1}^n e^{+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 a_1^2 n_1^2} \cdot t} \\ &+ B_{s1}^n e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 a_1^2 n_1^2} \cdot t} \Big) \xi_{s1}^n \eta_{s1}^n \end{aligned} \tag{56}$$

resp.

$$\begin{aligned} \Pi_J = &\sum_s \sum_n (A_s^n e^{+ant} + B_s^n e^{-ant}) \xi_s^n \eta_s^n \\ &+ \sum_s \sum_n (C_s^n e^{+ant} + D_s^n e^{-ant}) \xi_{1s}^n \eta_s^n . \end{aligned} \tag{57}$$

Die Gleichungen (55) sollen zu jeder Zeit bestehen, sie müssen daher unabhängig von t werden. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2\, n_1^2} &= +\, a\, n \\ -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2\, n_1^2} &= -\, a\, n. \end{aligned} \tag{58}$$

Diese beiden Gleichungen können nur für $\sigma = 0$ gleichzeitig bestehen, für $\sigma \neq 0$ müssen die Konstanten A, B, C und D so gewählt werden, daß sich die beiden Gleichungen (58) auf eine reduzieren. Wir haben früher angenommen, daß der reelle Teil von n positiv sein soll, dies würde bei imaginären Wurzel $\sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2\, n_1^2}$ der zweiten Gleichung (58) entsprechen. Wir nehmen daher $A_s^n = C_s^n = A_{s1}^n = 0$, wodurch die erste Gleichung (58) in Wegfall kommt.

Wir erfüllen die Grenzbedingungen, indem wir setzen:[1])

$$\left(\frac{\partial \Pi_L}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Pi_J}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0 \tag{59}$$

$$\left(\frac{\partial \Pi_L}{\partial y}\right)_{x=x_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Pi_J}{\partial y}\right)_{x=x_0} = 0 \tag{60}$$

$$\varepsilon_L A \left(\frac{\partial \Pi_L}{\partial t}\right)_{x=x_0} + 4\pi\lambda A (\Pi_L)_{x=x_0} = \varepsilon_J A \left(\frac{\partial \Pi_J}{\partial t}\right)_{x=x_0} \tag{61}$$

Die erste Gleichung (59) befriedigen wir dadurch, daß wir setzen:

$$\left(\frac{d\, \xi_{s1}}{d\, x}\right)_{x=x_0} = 0 \tag{62}$$

Diese Gleichung gibt uns die noch fehlende Bestimmung

[1]) Vgl. Lindemann, l. c., pag. 44 ff.

der Zahlen n_1. Wir werden später zeigen, daß die Wurzeln n_1 rein imaginär sein müssen.

Aus der Gleichung (58) erhält man die zugehörigen Werte von n, welche unter der Bedingung $\sigma^2 < 4\,a_1^2\,n_1^2$ komplex sind.

Die zweite Gleichung (59) ist

$$B_s^n \left(\frac{d\,\xi_s^n}{d\,x}\right)_{x=x_0} + D_s^n \left(\frac{d\,\xi_{1s}}{d\,x}\right)_{x=x_0} = 0, \tag{63}$$

wir können deshalb setzen:

$$B_s^n = a_s^n \left(\frac{d\,\xi_{1s}^n}{d\,x}\right)_{x=x_0}, \quad D_s^n = -\,a_s^n \left(\frac{d\,\xi_s^n}{d\,x}\right)_{x=x_0}, \tag{64}$$

wobei wir die Konstante a_s^n so wählen, daß Π_J für $x = x_0$ unabhängig von y wird. Setzen wir zu diesem Ende:

$$\left(\frac{d\,\xi_{1s}^n(x)}{d\,x}\right)_{x=x_0} \xi_s(x) - \left(\frac{d\,\xi_s}{d\,x}\right)_{x=x_0} \xi_{1s} = S_s(x) \tag{65}$$

und

$$a_s^n\,S_s(x_0) = \delta_s^n \cdot \alpha^n, \tag{66}$$

wo sich δ_s^n aus (32) ergibt, so wird in der Tat für $x = x_0$:

$$\Pi_J(x_0) = \sum_s \sum_n \alpha^n\,\delta_s^n\,\eta_s^n\,e^{-\alpha n t}$$

unabhängig von y, denn es ist $\sum_s \delta_s^n\,\eta_s^n = 1$ nach Formel (31). Hiemit ist die zweite Gleichung (60) erfüllt. Die erste Gleichung (60) lautet:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_s \sum_n B_{s1}^n\,\xi_{s1}(x_0)\,\eta_{s1}^n\right] = 0. \tag{67}$$

Setzt man:

$$B_{s1}^n\,\xi_{s1}(x_0) = \delta_{s1}^n\,\alpha_1^n, \tag{68}$$

wo jetzt δ_{s1}^n für das Innere des Leiters gerade so gebildet wird wie δ_s^n für das Äußere, so wird Π_L für $x = x_0$ unabhängig von y und damit ist auch (66) erfüllt.

Die Grenzbedingung (61) nimmt schließlich die Gestalt an:

$$\sum_n \left(+ \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2 n_1^2} \right) \sum_s a_1^n \delta_{s1}^n \eta_{s1}^n = - \frac{\varepsilon_J}{\varepsilon_L} a \sum_s \sum_n n\, a^n \delta_s^n \eta_s^n$$

oder:

$$\sum_n \left(+ \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2 n_1^2} \right) a_1^n = - \frac{\varepsilon_J}{\varepsilon_L} a \sum_n a^n n.$$

Es muß also für jeden Wert n sein:

$$\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\, a_1^2 n_1^2} \right) a_1^n = - \frac{\varepsilon_J}{\varepsilon_L} a\, n \cdot a^n. \tag{69}$$

Die Grenzbedingungen sind nun alle erfüllt. Ist der Zustand für das Innere durch die Amplitude B_{s1}^n gegeben, so kann man aus (20) und (62) die Konstanten ϑ und n_1 berechnen und hieraus die Schwingungsdauer für das Innere. Aus (58) findet man n und damit die Schwingungsdauer und das Dämpfungsdekrement für das Äußere.

Aus (68) findet man a_1^n, dann aus (69) a^n und schließlich aus (64) und (66) die Konstanten B_s^n und D_s^n.

Es kommt nun noch die Bedingung (54) für die Ausstrahlung:

$$\sum_s \sum_n \left(\frac{B_s^n}{n^2} + D_s^n R_1 \right) = 0$$

hinzu, welche sich mit (63) nur dann verträgt, wenn:

$$R_1 \cdot n^2 = \frac{\left(\frac{d\, \xi_{1s}}{d\, x} \right)_{x = x_0}}{\left(\frac{d\, \xi_s}{d\, x} \right)_{x = x_0}} \tag{70}$$

ist.

Dies wäre eine dritte Bestimmung für die Konstanten ϑ und n_1, welche nur dann durch die Werte aus $\gamma' = 0$ und $\left(\frac{d\, \xi_{s1}}{d\, x} \right)_{x = x_0} = 0$ erfüllt wird, wenn die Konstanten des Problems in einer bestimmten Beziehung stehen.

Im allgemeinen Falle treten daher immer Funktionen von $(x - at)$ und $(x + at)$ im Unendlichen auf, es findet Emission und Absorption zugleich statt.

Zum Schlusse soll noch bewiesen werden, daß die Wurzeln n_1 und ϑ der transzendenten Gleichungen:

$$\gamma = 0 \text{ und } \left(\frac{d\xi_{s1}}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$$

reell oder rein imaginär sein müssen.[1])

ξ_1 und ξ_2 seien zwei gerade Funktionen (wie ξ_{11}), die zu konjugiert imaginären Wertepaaren:

$$n_1 = n' + i\,n'' \text{ und } \vartheta_1 = \lambda + i\,\mu$$
$$n_2 = n' - i\,n'' \qquad \vartheta_2 = \lambda - i\,\mu$$

gehören.

Da $\left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_{x=0} = 0$ und $\left(\frac{d\xi_1}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$ ist, können wir in derselben Weise wie früher (pag. 17) von 0 bis x_0 statt von -1 bis $+1$ integrieren, wir erhalten demnach:

$$0 = (n_1^2 - n_2^2)\int_0^1 \xi_1(x)\cdot\xi_2(x)\,dx - (\vartheta_1 - \vartheta_2)\int_0^1 \frac{\xi_1(x)\,\xi_2(x)}{1-x^2}\,dx$$

und (71)

$$0 = (n_1^2 - n_2^2)\int_0^{x_0} \xi_1(x)\;\xi_2(x)\,dx - (\vartheta_1 - \vartheta_2)\int_0^{x_0} \frac{\xi_1(x)\cdot\xi_2(x)}{1-x^2}\,dx.$$

Nun ist $\xi_1(x)$ und $\xi_2(x)$ durch $(1-x^2)$ teilbar, also können wir setzen:

$$\xi_1(x)\cdot\xi_2(x) = (1-x^2)^2\cdot F(x),$$

wo $F(x)$ reell und positiv ist.

Die Bedingung für das Bestehen der Gleichungen (71) wird demnach:

[1]) Dieser Beweis wurde mir von Herrn Professor Lindemann gütigst überlassen.

$$\int_0^{x_0}(1-x^2)^2\,F(x)\,dx\int_0^1(1-p^2)\,F(p)\,dp$$

$$=\int_0^{x_0}(1-x^2)\,F(x)\,dx\int_0^1(1-p^2)^2\,F(p)\,dp,$$

wo p nur eine neue Integrationsvariable ist.

Oder es ist auch:

$$\int_0^{x_0}dx\int_0^1(1-x^2)\,\Phi(p,x)\,dp=\int_0^{x_0}dx\int_0^1(1-p^2)\,\Phi(p,x)\,dp. \qquad (72)$$

wobei:

$$\Phi(p,x)=(1-p^2)(1-x^2)\,F(p)\cdot F(x) \qquad (73)$$

gesetzt wurde, also auch reell und positiv ist.

Beide Doppelintegrale (72) beziehen sich auf dasselbe Integrationsgebiet. Da $\Phi(p,x)=\Phi(x,p)$, so ist jedenfalls auch:

$$\int_0^1dx\int_0^1(1-x^2)\,\Phi(p,x)\,dp=\int_0^1dx\int_0^1(1-p^2)\,\Phi(p,x)\,dp. \qquad (66)$$

Durch Subtraktion von (64) u. (66) ergibt sich (da $x_0>1$ war):

$$\int_1^{x_0}dx\int_0^1(1-x)\,\Phi(p,x)\,dp=\int_1^{x_0}dx\int_0^1(1-p^2)\,\Phi(p,x)\,dp. \qquad (67)$$

Hier ist:

$$0<p<1<x<x_0,$$

also für alle Werte von x und p:

$$1-p^2>1-x^2.$$

Also auch:

$$(1-p)\,\Phi(p,x)>(1-x^2)\,\Phi(p,x)$$

und

$$\int_1^{x_0}dx\int_0^1(1-x^2)\,\Phi(p,x)\,dp<\int_1^{x_0}dx\int_0^1(1-p^2)\,\Phi(p,x)\,dp.$$

Folglich können beide Seiten nicht gleich sein; die beiden Gleichungen (63) können nicht zusammen bestehen; es müßte also:

$$n_1^2 = n_2^2 \text{ und } \vartheta_1 = \vartheta_2$$

sein oder

$$n'^2 - n''^2 + 2\,i\,n' \cdot n'' = n'^2 - n''^2 - 2\,i\,n'\,n''$$

$$\lambda + i\,\mu = \lambda - i\,\mu.$$

Hieaus folgt:

ϑ stets reell

n_1 entweder rein reell oder rein imaginär.

Um überhaupt Schwingungen zu erhalten, müssen wir n_1 imaginär annehmen, n ist dann unter der Bedingung $\sigma^2 < 4\,a_1^2\,n_1^2$ komplex, und diese Bedingung ist für große Werte von a_1 (Lichtgeschwindigkeit) sicher erfüllt.

Lebenslauf.

Ich, Franz Fuchs, geboren am 10. Oktober 1881 zu Straßburg i. E., absolvierte 1901 das Realgymnasium zu Wiesbaden, nachdem ich dasselbe neun Jahre besucht hatte. Im darauffolgenden Sommersemester besuchte ich die Technische Hochschule Darmstadt, dann von 1901—1905 die Universität und das Polytechnikum München; hier bestand ich 1903 den ersten und 1905 den zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Seit 1905 bin ich als Assistent für Physik am Deutschen Museum für Meisterwerke der Naturwissenschaft und Technik. Ich widmete mich vornehmlich dem Studium der Mathematik und Physik und besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten von Baeyer, von Braunmühl, Doehlemann, Dingeldey, Emden, Graetz, von Groth, Güttler, Henneberg, Korn, Lindemann, Röntgen, Schering, von Seeliger, Voß, von Weber.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders den Herren Professoren Graetz und Lindemann bin ich zu großem Danke verpflichtet.